PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Dans les notations ci-dessous K désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$; si E est un espace vectoriel sur K de dimension finie et si $u \in L_K(E)$ ($L_K(E)$ est l'algèbre sur K constituée des endomorphismes de E), on note $\exp(u)$ (et parfois $\exp u$) l'exponentielle de l'endomorphisme u :

$$\exp(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}.$$

On rappelle d'une part que, quand u et v commutent ($u \circ v = v \circ u$),

$$\exp(u+v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u)$$

et, d'autre part, que $\exp(u)$ commute avec u.

Si $E = K^n$, $L_K(E)$ s'identifie à l'espace des matrices $n \times n$ à coefficients dans K noté $M_n(K)$.

Si $A \in M_n(K)$ et $B \in M_n(K)$, on note $A \oplus B$ la matrice de $M_{2n}(K)$ donnée par blocs sous la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

On propose dans ce problème une étude de l'application exponentielle $M_n(C) \to GL_n(C)$ et de sa restriction $M_n(\mathbf{R}) \to GL_n(\mathbf{R})$.

Dans les questions I1, I2, II1 à II4, E désigne un C-espace vectoriel de dimension finie n.

PARTIE I

1. Montrer que l'application $\exp : L_C(E) \to L_C(E)$ prend ses valeurs dans le groupe $GL_C(E)$ des automorphismes de E.

2. *a.* Soient $u \in L_C(E)$, $v \in GL_C(E)$; exprimer $\exp(vuv^{-1})$ en fonction de v et $\exp(u)$.

   Quelles sont les valeurs propres de $\exp(u)$ en fonction de celles de u ?

   b. En déduire une expression de $\det(\exp(u))$ en fonction de trace (u) puis le fait que $\exp : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ prend ses valeurs dans le groupe $GL_n^+(\mathbf{R})$ des matrices réelles $n \times n$ inversibles de déterminant positif.

3. Soient $A = \begin{bmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ \mu & b \end{bmatrix}$ (a, b, μ appartiennent à C).

   Calculer $\exp(A)$, $\exp(B)$, $\exp(A+B)$; à quelles conditions a-t-on ici : $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$?

PARTIE II

1. Soit $\ell(X)$ le polynôme

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(1-X)^i}{i} ;$$

pour $u \in L_C(E)$ *nilpotent* et $t \in \mathbf{R}$, calculer

$$(I_E + tu) \frac{d}{dt} \ell(I_E + tu).$$

(I_E désigne l'application identique de E).

2. *a.* Soit $\gamma : \mathbf{R} \to L_C(E)$ un chemin de classe C^1 à valeurs dans une sous-algèbre *commutative* de $L_C(E)$ tel que $\gamma(t)$ soit nilpotent pour tout $t \in \mathbf{R}$; calculer $\frac{d}{dt} \exp \gamma(t)$.

   b. On fixe un endomorphisme *nilpotent* $u \in L_C(E)$;
   soit $f : \mathbf{R} \to L_C(E)$ définie par $f(t) = \exp \ell(I_E + tu)$.
   Calculer $(I_E + tu) f'(t)$; en déduire la valeur de f'' puis celle de f.
   Conclure que $\exp \ell(I_E + u) = I_E + u$.

3. Déduire de 2.*b.* que pour $\lambda \in C^*$ et u endomorphisme nilpotent de E,

$$\lambda I_E + u \in \exp L_C(E).$$

Tournez la page S.V.P.

page 90
1988
E.N.S. de LYON
Option Math-Phys

4. Montrer que exp : $L_C(E) \to GL_C(E)$ est une surjection.

   À titre d'exemple on explicitera une matrice $A \in M_3(C)$ telle que :

$$\exp(A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Dans cette question, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension finie n ; si $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ et u est un endomorphisme nilpotent de E, montrer que $\lambda I_E + u \in \exp L_{\mathbf{R}}(E)$.

PARTIE III

1. Établir un lien entre le corps C des nombres complexes et l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbf{R})$ de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$.

   En déduire que :

$$\exp \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}.$$

   Retrouver ce résultat en utilisant la définition originale de l'exponentielle des matrices.

2. Expliciter une matrice réelle A ($A \in M_2(\mathbf{R})$) telle que :

$$\exp(A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Plus généralement, si $\lambda < 0$, expliciter une matrice réelle A ($A \in M_{2n}(\mathbf{R})$) telle que :

$$\exp(A) = \lambda I_{2n}.$$

   (I_{2n} désigne l'élément unité de $M_{2n}(\mathbf{R})$).

3. Expliciter $A \in M_{2n}(\mathbf{R})$ telle que $\exp(A) = -I_{2n}$ et telle que A commute à $B \oplus B$ pour tout $B \in M_n(\mathbf{R})$.

   En déduire que, pour $B \in M_n(\mathbf{R})$, $-\exp(B \oplus B) \in \exp M_{2n}(\mathbf{R})$.

   À titre d'exemple on explicitera une matrice $U \in M_4(\mathbf{R})$ telle que :

$$\exp(U) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

PARTIE IV

1. *a.* Expliciter une matrice $R \in M_2(\mathbf{R})$ semblable (dans $M_2(C)$) à la matrice

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{bmatrix} \quad (a \in C).$$

   b. Plus généralement, pour $A \in M_n(C)$, construire une matrice $R \in M_{2n}(\mathbf{R})$ semblable (dans $M_{2n}(C)$) à $A \oplus \bar{A}$.

2. Soient U, V deux matrices réelles ($U, V \in M_n(\mathbf{R})$) semblables comme matrices de $M_n(C)$; en considérant des relations du type $UX = XV$, $X \in M_n(C)$, montrer que U et V sont semblables comme matrices de $M_n(\mathbf{R})$.

3. Soit $B \in GL_{2n}(\mathbf{R})$; on suppose qu'il existe $A \in M_n(C)$ telle que B soit semblable (dans $M_{2n}(C)$) à $A \oplus \bar{A}$; montrer que $B \in \exp M_{2n}(\mathbf{R})$.

4. *a.* En déduire que pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbf{R})$, on a :

$$A \oplus A \in \exp M_{2n}(\mathbf{R}).$$

   b. Soit $B \in GL_n(\mathbf{R})$ sans valeur propre réelle ; montrer l'existence d'une décomposition $C^n = E \oplus \bar{E}$ où E est un C sous-espace vectoriel stable par B, $\bar{E}$ désignant $\{\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n)$ avec $z \in E\}$.

   En déduire que $B \in \exp M_n(\mathbf{R})$.

Suite →

PARTIE V

1. Montrer que la matrice $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ de $GL_2^+(\mathbf{R})$ n'appartient pas à $\exp M_2(\mathbf{R})$. (On pourra raisonner par l'absurde en étudiant les valeurs propres d'une matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ qui vérifierait $\exp(A) = B$).

   Dans les questions 2, 3 et 4, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie, et u un élément de $GL_{\mathbf{R}}(E)$.

2. On suppose que $u \in \exp L_{\mathbf{R}}(E) \subset GL_{\mathbf{R}}^+(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note u/F la restriction de u à F.

   a. Donner un exemple où $u/F \notin \exp L_{\mathbf{R}}(F)$.

   b. On suppose F de la forme $\operatorname{Ker} P(u)$ où $P \in \mathbf{R}[X]$; montrer que $u/F \in \exp L_{\mathbf{R}}(F)$.

   c. En déduire une généralisation de la question V1. : si $\lambda < 0$, la matrice

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

   de $GL_n(\mathbf{R})$ n'appartient pas à $\exp M_n(\mathbf{R})$.

3. Soit χ le polynôme caractéristique de u, χ_2 le produit des facteurs irréductibles unitaires (réels) de χ de degré 2, χ_1^+ (respectivement χ_1^-) le produit des facteurs de χ de degré 1 de la forme $(X - \lambda)$ avec $\lambda > 0$ (respectivement $\lambda < 0$). On pose $F^+ = \operatorname{Ker} \chi_1^+(u)$, $F^- = \operatorname{Ker} \chi_1^-(u)$.

   a. Montrer que $E = \operatorname{Ker} \chi_2(u) \oplus F^+ \oplus F^-$.

   b. En utilisant II-5, IV-4.*b.* et V-2.*b.*, montrer que $u \in \exp L_{\mathbf{R}}(E)$ si et seulement si $u/F^- \in \exp L_{\mathbf{R}}(F^-)$.

4. *a.* Montrer que la condition « u est un carré dans $GL_{\mathbf{R}}(E)$ » est nécessaire pour que $u \in \exp L_{\mathbf{R}}(E)$.

   b. On suppose $u = v^2$ avec $v \in GL_{\mathbf{R}}(E)$; vérifier que F^- est stable par v puis que $v/F^- \in \exp L_{\mathbf{R}}(F^-)$.

   En déduire que $\exp L_{\mathbf{R}}(E)$ est exactement l'ensemble des carrés de $GL_{\mathbf{R}}(E)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail